ENSTA MAE31 – Calcul scientifique à haute performance – Année 2016-2017

Cours : FFT – Fast Fourier Transform

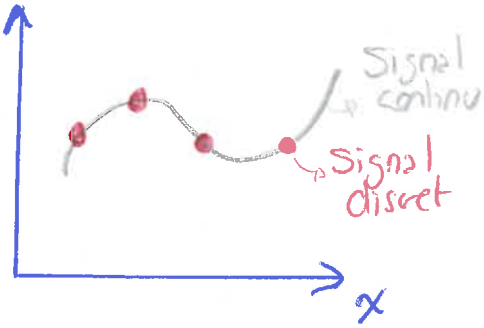
A. Modave, 24/03/2017

<u>Références :</u>

– *Introduction à l'algorithmique* (Chapitre 30)
T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest et C. Stein
Dunod

– *Introduction to Algorithms* (Chapter 30)
T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest and C. Stein
MIT press

FFT - Fast Fourier Transform



On a un signal | continu $f(x)$
| discret $\{f_m\}_{m=0\cdots N-1}$

dont on cherche à extraire des infos.

Cas continu

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2\pi i \nu x}\, dx$$

Transfo. de Fourier continue (CFT)

$$f(x) = 1/2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu)\, e^{2\pi i \nu x}\, d\nu$$

(inverse)

⇝ décompositº de $f(x)$
en oscillatº harmoniques (un nombre ∞ !)

Cas discret

$(n=0\cdots N-1)$ $$\hat{f}_n = \sum_{m=0}^{N-1} f_m\, e^{-2\pi i m n/N}$$

Transfo de Fourier discrète (DFT)

$(m=0\cdots N-1)$ $$f_m = 1/N \sum_{n=0}^{N-1} \hat{f}_n\, e^{2\pi i m n/N}$$

(inverse)

⇝ décompositº de $\{f_m\}_{m=0\cdots N-1}$
en N oscillatº harmoniques
Les valeurs "$\hat{f}_n/N$" sont les amplitudes

Commentaires sur la DFT

* La DFT peut être vue comme une CFT sur un signal échantillonné :

$$f(x) = \sum_{m=0}^{N-1} f_m \, \delta(\underbrace{x-m\Delta}_{x_m})$$

$\to \Delta =$ période d'échantillonnage

pour un nombre fini de fréquence : $\nu_n = n/N\Delta \quad n = 0 \cdots N-1$

On a :

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{m=0}^{N-1} f_m \, \delta(x-m\Delta)\right) e^{-2\pi i \nu x} dx$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} f_m \, e^{-2\pi i \nu m \Delta}$$

$$\rightsquigarrow \hat{f}_n = \hat{f}(\nu_n) = \sum_{m=0}^{N-1} f_m \, e^{-2\pi i m n/N}$$

* Preuve de la DFT inverse : (on injecte DFT inverse dans DFT)

$$f_m = 1/N \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{p=0}^{N-1} f_p \, e^{-2\pi i p n/N}\right) e^{2\pi i m n/N}$$

$$= 1/N \sum_{p=0}^{N-1} f_p \left(\underline{\sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{-2\pi i (p-m)/N}\right)^n}\right)$$

si $p=m$: $\boxed{= N}$

si $p \neq m$: série géométrique !

RAPPEL : $\sum_{\ell=0}^{L} x^\ell = \frac{x^{L+1}-1}{x-1}$

$$\rightsquigarrow = \frac{e^{-2\pi i (p-m)}-1}{e^{-2\pi i (p-m)/N}-1} \quad \boxed{=0}$$

$$= 1/N \, f_m \, N$$

$$= f_m$$

* Le calcul de la DFT est a priori une opérat° BLAS 2 !

$$\hat{f}_n = \sum_{m=0}^{N-1} f_m \, e^{-2\pi i m n/N}$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} f_m \, (\underbrace{e^{-2\pi i/N}}_{W_N})^{mn} \qquad n = 0 \cdots N-1$$

$$\begin{pmatrix} \hat{f}_0 \\ \hat{f}_1 \\ \hat{f}_2 \\ \vdots \\ \hat{f}_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & \cdots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\hat{f}} = \underline{\underline{W}} \; \underline{f}$$

$O(N^2)$ opérations

Algorithme FFT

On suppose $N = 2^p$ (puissance de 2)

Principe : on sépare le traitement des termes impairs et pairs dans le calcul de la DFT.

$$\hat{f}_n = \sum_{m=0}^{N-1} f_m W_N^{mn} \quad (\text{avec } W_N = e^{-2\pi i/N})$$

$$= \underbrace{\sum_{m=0}^{N/2-1} f_{2m} W_N^{2mn}}_{\text{PAIRS}} + \underbrace{\sum_{m=0}^{N/2-1} f_{2m+1} W_N^{(2m+1)n}}_{\text{IMPAIRS}}$$

on observe : $W_N^2 = e^{-2\pi i/N \cdot 2}$
$= e^{-2\pi i/(N/2)} = W_{N/2}$

$$= \sum_{m=0}^{N/2-1} f_{2m} W_{N/2}^{mn} + W_N^n \sum_{m=0}^{N/2-1} f_{2m+1} W_{N/2}^{mn}$$

- Si $n = 0 \cdots N/2-1$:

$$\hat{f}_n = \underbrace{\sum_{m=0}^{N/2-1} f_{2m} W_{N/2}^{mn}}_{\text{DFT sur } N/2 \text{ val.}} + W_N^n \underbrace{\sum_{m=0}^{N/2-1} f_{2m+1} W_{N/2}^{mn}}_{\text{DFT sur } N/2 \text{ val.}}$$

- Si $n = N/2 \cdots N-1$: on note $\tilde{n} = n - N/2 = 0 \cdots N/2 - 1$

$$\hat{f}_{\tilde{n}+N/2} = \sum_{m=0}^{N/2-1} f_{2m} W_{N/2}^{m(\tilde{n}+N/2)} + W_N^{(\tilde{n}+N/2)} \sum_{m=0}^{N/2-1} f_{2m+1} W_{N/2}^{m(\tilde{n}+N/2)}$$

on observe : $W_{N/2}^{N/2} = e^{-2\pi i/(N/2) \cdot (N/2)}$
$= e^{-2\pi i} = 1$

$W_N^{N/2} = e^{-2\pi i/N \cdot (N/2)}$
$= e^{-\pi i} = -1$

$$= \underbrace{\sum_{m=0}^{N/2-1} f_{2m} W_{N/2}^{m\tilde{n}}}_{\text{DFT sur } N/2 \text{ val.}} - W_N^{\tilde{n}} \underbrace{\sum_{m=0}^{N/2-1} f_{2m+1} W_{N/2}^{m\tilde{n}}}_{\text{DFT sur } N/2 \text{ val}}$$

Implémentations FFT

RECURSIVE-FFT ($\underline{f}$) :

N = Longueur de $\underline{f}$;

if N = 1 :

$\hat{\underline{f}} = \underline{f}$;

else

$\underline{f}^{[0]} = (f_0, f_2, \dots, f_{N-2})$;

$\underline{f}^{[1]} = (f_1, f_3, \dots, f_{N-1})$;

signaux de longueur N/2

$\hat{\underline{f}}^{[0]}$ = RECURSIVE-FFT ($\underline{f}^{[0]}$) ;

$\hat{\underline{f}}^{[1]}$ = RECURSIVE-FFT ($\underline{f}^{[1]}$) ;

2 FFT pour N/2 éléments

for $n = 0 \dots N/2 - 1$

$\hat{f}_n = \hat{f}_n^{[0]} + W_N^n \hat{f}_n^{[1]}$;

$\hat{f}_{N/2+n} = \hat{f}_n^{[0]} - W_N^n \hat{f}_n^{[1]}$;

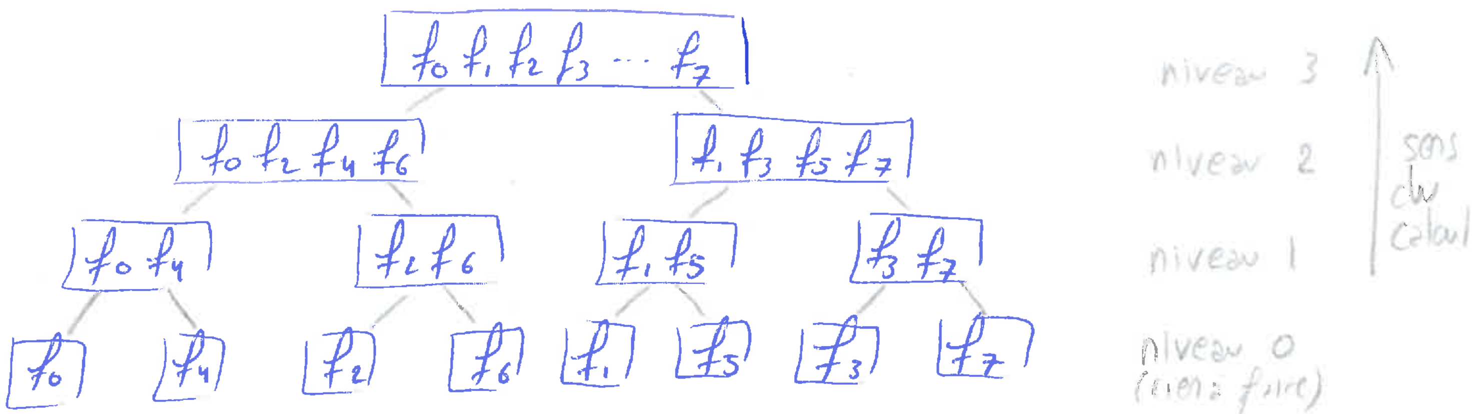
end

end

return : $\hat{\underline{f}}$;

Le calcul se fait "par niveau", de 1 à P.

Cas $P = 3 \leadsto N = 8$:



Pour une implémentation efficace, on va

1) réordonner les valeurs $\{f_m\}_{m=0\cdots N-1}$ pour une gestion efficace de la mémoire.
2) utiliser un algo itératif (du niveau 1 au niveau P) plutôt qu'un algo récursif.

Pour réordonner : $(f_0\ f_1\ f_2\ f_3\ f_4\ f_5\ f_6\ f_7)$

$(f_0\ f_4\ f_2\ f_6\ f_1\ f_5\ f_3\ f_7)$ (prêt pour le niveau 1 !)

Les indices des valeurs réordonnées sont donnés par un "renversement digital" des indices initiaux :

0	1	2	3	4	5	6	7
000	001	010	011	100	101	110	111
000	100	010	110	001	101	011	111
0	4	2	6	1	5	3	7

ITERATIVE FFT ($\underline{f}$): → tableau de longueur N avec les $\{f_m\}_{m=0\cdots N-1}$ réordonnés !

```
BIT-REVERSAL-COPY (f, A)
N = Longueur de A ;        P = Log2 N ;
for p = 1 .... P
    Ñ = 2^p ;
    for l = 0, Ñ, 2Ñ, ..., N-1
        for n = 0, 1, 2, ..., Ñ/2 - 1
            u0 = A[l+n] ;
            u1 = A[l+n+Ñ/2] ;
            A[l+n]      = u0 + W_Ñ^n u1 ;
            A[l+n+Ñ/2] = u0 - W_Ñ^n u1 ;
        end
    end
end
return : A ;
```

$P = \log_2(N)$ niveaux avec $\mathcal{O}(N)$ op/niveau

$\Rightarrow \mathcal{O}(N \log N)$ opérations